

Leerbaarheid van hoofdrekenen, rekenachterstanden en automatiseringstekorten

Eerste resultaten met betrekking tot het Voortgezet Onderwijs

W. Danhof, P. Bandstra, S. Faber, A. Minnaert en W. Ruijsenaars

Inleiding en achtergrond

In de publicatie *Over de drempels met rekenen* stelt de 'Expertgroep doorlopende leerlijnen Taal en rekenen' (2008) dat voor leerlingen die uitstromen naar VMBO/LWOO een basaal niveau vereist is. De schatting is dat op dit moment ongeveer 20 procent van de kinderen dit 1F-niveau niet haalt. Volgens de Expertgroep moet er naar gestreefd worden dat de helft van deze groep op het basale niveau gaat functioneren. Over de andere helft stelt de Expertgroep:

Deze leerlingen leren vanaf groep 6 te weinig, omdat zij de basale begrippen en vaardigheden uit de voortgaande jaren nog niet beheersen, terwijl het onderwijsaanbod daar wel op voortbouwt.

De Expertgroep benadrukt het cumulatieve karakter van rekenen. Rekenen is in sterke mate een stapeling van kennis en vaardigheden. Dit roept een aantal vragen op: Welke problemen ontstaan in groep 4/5? Om welke typen sommen gaat het? Welke leerlingen lopen vast? En waarom lopen ze hier vast?

Sinds enkele jaren wordt aan de Rijksuniversiteit Groningen in het Basisonderwijs en Speciaal Basisonderwijs een longitudinaal grootschalig onderzoek uitgevoerd naar de ontwikkeling van het automatiseren van het hoofdrekenen tot 100. Speciale aandacht gaat daarbij uit naar optredende achterstanden en tekorten in de automatisering van het rekenen. Inmiddels zijn belangrijke delen van het onderzoek herhaald door onderzoekers van de universiteiten van Utrecht (o.l.v. Van Luit) en Gent (o.l.v. Desoete), zodat een goed beeld begint te ontstaan hoe de rekenontwikkeling van basisschoolleerlingen verloopt. Omdat er in het verlengde van het onderzoek ook metingen zijn gedaan bij leerlingen die instromen in het voortgezet onderwijs, is na te gaan welke prestatieverschillen er tussen leerlingen bestaan, wanneer die beginnen op te treden en hoe die zich verder ontwikkelen. Voor een beschrijving van de meer gedetailleerde achtergronden van het onderzoek verwijzen we naar het artikel 'Onderzoeksproject leerbaarheid van hoofdrekenen' (Danhof e.a., 2008). Publicatie van de resultaten van het onderzoeksproject zullen na het afronden van de analyses plaatsvinden.

In deze bijdrage gaan we in op enkele voorlopige gegevens die mede van belang zijn in het licht van de conclusies van bovengenoemde Expertgroep, al beperken we ons hier tot een aantal gegevens die betrekking hebben op voortgezet onderwijs. We schetsen achtereenvolgens: de opzet van het onderzoek en de relevantie voor het onderwijs, een aantal uitkomsten en conclusies, en de gevolgen voor de handelingsgerichte diagnostiek. In een volgende bijdrage gaan we in op de diagnostische middelen die vanuit het project worden ontwikkeld.

Opzet van het onderzoek

Vanaf 2006 zijn elk half jaar klassikaal twee typen toetsen afgenomen bij leerlingen uit het regulier en het speciaal basisonderwijs, vanaf groep 3 en groep 4. Vanaf 2010 zijn ook leerlingen in het voortgezet onderwijs onderzocht: Praktijkonderwijs (PrO), Basis Beroeps /

Kader Beroeps (BB/KB), Kader Beroeps / Theoretische Leerweg (KB/TL). In totaal hebben alleen al in de noordelijke provincies ruim 1000 leerlingen meegedaan. De twee typen toetsen die in het voortgezet zijn afgenomen, zijn:

- Screening (power) toetsen, waarin aan de hand van cruciale typen sommen uit de groepen 3 t/m 7 (per type 4 sommen) kan worden nagegaan óf ze deze sommen kunnen oplossen. De toetsen zeggen iets over het in principe bereikte niveau en over het kunnen toepassen van de juiste procedures.
- Speed toetsen, waarbij het gaat om het op snelheid (automatisering) oplossen van de basissommen tot 100, inclusief de tafels. De basissommen zijn ontleend aan het drempelmodel dat Danhof en Bandstra ontwikkelden (zie Danhof e.a., 2008).

Uitgangspunt is dat voor het procedureel correct kunnen oplossen van sommen het vlot kunnen beschikken over basale (liefst geautomatiseerde) voorkennis een vereiste is. Automatiseringstekorten bij de drempels leiden tot achterstanden bij hoofdrekenen.

De sommen uit de groepen 3 t/m 7 kunnen cumulatief worden geordend in het volgende (deels overlappende) fasenmodel:

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Groep 3, 4, 5	Groep 5/6	Groep 6/7	Groep 6/7
Getallenlijn tot 100	Tot 1000 (basaal)		
Plus en min tot 10	Tafels en delen	Plus/min grote getallen Vermenigvuldigen en delen	Procenten, breuken kommagetallen
Plus en min over het tiental tot 20, de bouwstenen v.h. rijgen:	Moeilijke sommen tot 100, rijgend:		
a) $54 + 40$ b) $54 - 40$ c) $25 + 7$ d) $25 - 7$	a) $64 + 28$ b) $64 - 28$		

De samenhang tussen de fasen

We richten ons in het navolgende op twee markante typen sommen van fase 2, die op het eind van groep 5 beheerst dienen te zijn. De sommen maken duidelijk of het rekenen tot 100 voldoende is afgerond (in het drempelmodel is dit drempel 5). Het betreft de moeilijke sommen tot 100 en de tafels van 6 t/m 9. De basis voor deze sommen ligt in het (vlot) kunnen toepassen van de sommen uit fase 1 (in het drempelmodel: drempel 1 t/m 4). Anders gezegd: er bestaat een cumulatieve samenhang tussen de fasen (drempels). We geven enkele voorbeelden van deze samenhang.

Bij de moeilijke sommen tot 100 zijn de volgende twee procedures dominant: rijgen en splitsen.

- a. Splitsen: $64 + 28 = 60 + 20$ en $4 + 8$ en $80 + 12$ en ...
 $64 - 28 = 60 - 20$ en $4 - 8$ (maar: 4 tekort)
- b. Rijgen: $36 + 28 = 36 + 20 + 8$
 $64 - 28 = 64 - 20 - 8$

Het is eenvoudig te zien dat het splitsen als procedure vooral risicovol is bij het aftrekken (je komt tekort) en dat bij het optellen meer tussenstappen nodig zijn. De rijgprocedure geeft de beste kans op succes, maar hiervoor is wel een vlotte beheersing van ‘plus en min over het tiental’ uit fase 1 een belangrijke voorwaarde.

De moeilijke tafels van 6 t/m 9 doen in sterke mate een beroep op een vlotte beheersing van sommen als $35 + 7$ en $35 - 7$ (fase I, drempel 4c en d). Als $5 \times 7 = 35$ het steunpunt is voor 4×7 en 6×7 , dan is een vlotte beheersing van $35 - 7$ en $35 + 7$ vereist. Het kunnen doorbreken van het tiental is daarom een belangrijke voorwaarde. En wanneer de beheersing van de tafels niet van de grond komt, dan zal dat gevolgen hebben voor fase 3 en 4 (vermenigvuldigen, delen, breuken, procenten).

De twee voorbeelden laten zien dat de manier waarop het rekenen tot 100 is afgerond een cruciaal signaal geeft voor de vraag of er voldoende basis is voor de leerstof van groep 6/7.

Enkele eerste resultaten voor het VO en de verschillende leerwegen

In het onderzoek participeerden in de provincie Friesland in het schooljaar 2010/2011 vier VO scholen en twee scholen voor Praktijkonderwijs. We bespreken de resultaten van de drie ‘laagste’ leerwegen: het Praktijkonderwijs (PrO) met 68 leerlingen, het Basis Beroeps en Kader Beroeps (BB/KB) met 102 leerlingen, en het Kader Beroeps en de Theoretische Leerweg (KB/TL) met 245 leerlingen.

Voor de Screening Toets geldt een norm van 75 % beheersing. Van elke 4 sommen is de score voldoende als er 3 of 4 correct worden opgelost. Onderstaande tabel laat per leerweg zien hoeveel % van de leerlingen de rekenstof beheerst.

Leerweg	Type: 64 + 28	Type: 64-28
PrO (N 68)	72%	35%
BB-KB (N 102)	85%	58%
KB -TL (N 245)	93%	80%

Het verschil tussen de plus- en minsommen is het grootst bij de lagere leerwegen. Voor de meeste leerlingen in het Praktijkonderwijs is de minsom te moeilijk. Bij nadere analyse van deze groep blijkt dat er een hoge samenhang is met de mate van geautomatiseerde beheersing van de typen sommen uit fase 1: $25 + 7$ (drempel 4c) en $25 - 7$ (drempel 4d), met respectievelijk een correlatie van .76 en .80 (op een schaal die maximaal 1.0 kan zijn). Hoewel de beperkte steekproef uit het Praktijkonderwijs maant tot voorzichtigheid, kunnen we dit als een duidelijk signaal zien van een sterk cumulatief verband.

Als we kijken naar de moeilijke tafels 6 t/m 9, dan ontstaat het volgende beeld, uitgaande van een norm voor beheersing van 80%.

Leerweg	Screening	Speed (automatisering)
PrO	35%	16%
BB-KB	72%	36%
KB-TL	85%	70%

Het blijkt dat 65% van de PrO leerlingen de moeilijke tafels niet kan oplossen en dat slechts een kleine groep van 16% komt tot geautomatiseerde beheersing. In BB-KB beheerst 72 % de tafels (screening), maar slechts 36% komt tot automatisering (en 65% niet!). In KB-TL zijn deze tafels bij 30% van de leerlingen niet geautomatiseerd. Overigens (niet in de tabel opgenomen) is er ook in de leerwegen TL/HAVO en HAVO/VWO nog altijd geen automatisering bij respectievelijk 28% en 18%. Dat is op z'n minst opmerkelijk, maar het verschil tussen vaardigheid (screening) en tempo (speed) is vooral bij de lagere leerwegen groot.

Er is er een grote groep die de sommen wel procedureel kan oplossen, maar die niet tot automatisering komt, wat hen parten zal spelen bij de hogere doelen. De resultaten van de PrO leerlingen vormen het uiteinde van een continuüm, maar illustreren door de grootte van de achterstanden en automatiseringstekorten ook de beperkingen en speciale behoeften van deze groep.

Uit nadere analyses van de hele steekproef blijkt dat de resultaten van de automatisering van de tafels sterk samenhangen met die van de automatisering van de onderliggende typen sommen uit fase 1, met correlaties variërend rond .70.

Opvallend is dat ook de - minder nabij gelegen- sommen 'over het eerste tiental' deze hoge samenhang met de tafels laten zien. Deze basale 'drempel' blijkt een hele krachtige voorspeller te zijn t.a.v. de moeilijke tafels.

De samenhang van de tafels met vermenigvuldigen en delen liggen ook rond de .70, terwijl de correlatie met breuken (.56) en procenten (.45) duidelijk lager ligt, maar nog altijd heel behoorlijk is.

Al met al kunnen we concluderen dat het cumulatieve karakter van het rekenen door de gepresenteerde onderzoeksresultaten sterk wordt ondersteund en wijst op de geldigheid en bruikbaarheid van de fasen-structuur en het drempelmodel. In volgende publicaties over het longitudinale onderzoek in het basisonderwijs zal een verdere onderbouwing van het drempelmodel worden gegeven.

Gevolgen voor de handelingsgerichte diagnostiek

Voor de handelingsgerichte diagnostiek betekent bovenstaande dat zowel een systematische vaardigheidsscreening per type som (gericht op het kennen van de procedures) als een gedegen toetsing van de geautomatiseerde voorkennis (per drempel) deel uit dienen te maken van het diagnostisch onderzoek, zodat voor een leerling met achterstanden een vaardigheidsprofiel kan worden opgebouwd. Op basis van dit profiel is te bepalen bij welke typen sommen nadere observatie van de procedures gewenst is. Het is dan vervolgens van belang om de interactie tussen tekorten in voorkennis in de observatie te betrekken.

Het zorgvuldig volgen van de ontwikkeling van de automatisering is niet alleen curatief van belang, maar maakt door vroegtijdige signalering ook preventie mogelijk. Door de rekenprofielen van de zwakke rekenaars eerder en duidelijker in beeld te brengen, kunnen tijdig goed onderbouwde keuzes worden gemaakt. Voor de leerlingen met hardnekkige achterstanden kan het vaardigheids- en automatiseringsprofiel een belangrijke bijdrage leveren om het leer- en ontwikkelingsperspectief te bepalen en om de keuze voor een haalbare rekenroute en eventuele noodzakelijke compensaties te verantwoorden. Het project *Passende Perspectieven van het SLO* schetst een nadere uitwerking van drie rekenroutes voor de leerlingen die het Fundamentele niveau (nog) niet halen. In het rapport *Passende perspectieven rekenen – Wegwijzer* (Boswinkel, e.a., 2012) wordt gesteld dat de onderbouwing van de keus voor de routes ‘vooral nog een punt van discussie zal blijven’. Aan deze discussie willen wij met ons onderzoek graag een bijdrage leveren. In een volgend artikel zullen we een schets geven van de diagnostische middelen die vanuit het project zijn ontwikkeld en van het diagnostische model dat ons daarbij voor ogen staat.

Literatuur

- Danhof, W., Bandstra, P., Milo, B., Mushati-Hamadani, E., Minnaert, A., & Ruijsenaars, W. (2008). Onderzoeksproject leerbaarheid van hoofdrekenen: naar criteria voor differentiatie en/of planning. *Panamapost. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenen- wiskunde onderwijs*, 27, 2, 24 -28.
- Meijerink, H (2008). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: SLO (Expert groep doorlopende leerlijnen)
- Boswinkel, N. e.a. (2012). *Passende Perspectieven rekenen – Wegwijzer*. Enschede: SLO.

Correspondentieadres:

W.Danhof@cedin.nl en A.E.M.G.Minnaert@rug.nl